UÇINÇI TARTIBLI OPERATORLI MATRITSA SPEKTRINING SONLI TASVIRDAGI JOYLAŞUVIGA DOIR MISOLLAR

Şodmonova Nozima Rözimurod qizi
Buxoro davlat universiteti,
Matematika yönalişi 1-bosqiç magistranti
E-mail: nozimashodmonova48@gmail.com

Annotatsiya: Uşbu tezisda Hilbert fazolarining töğri yiğindisida aniqlangan uçinçi tartibli operatorli matritsalarning kubik sonli tasviri va spektri orasidagi munosabatlar aniq misollar yordamida örganilgan. Blok uçburçakli, skalyar elementli, öz-öziga qöşma hamda Fok fazosining qirqilgan qism fazosida ta'sir qiluvçi operatorli matritsalar uçun spektr, odatdagi va kubik sonli tasvirlar hisoblangan. Misollar kubik sonli tasvir spektrni odatdagi sonli tasvirga nisbatan aniqroq lokalizatsiya qilişini va spektral lakunalarni aniqlaş imkonini berişini körsatadi.

Kalit sözlar: operatorli matritsa, Hilbert fazosi, sonli tasvir, kubik sonli tasvir, spektr, muhim spektr, diskret spektr, spektral qamraş, Fok fazosi.

ПРИМЕРЫ О РАСПОЛОЖЕНИИ СПЕКТРА ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ЕЁ ЧИСЛОВОМ ОБРАЗЕ

Шодмонова Нозима Рузимурод кизи
Бухарский государственный университет,
магистрант 1-курса направления «Математика»
E-mail: nozimashodmonova48@gmail.com

Аннотация: В данных тезисах на конкретных примерах изучается связь между кубическим числовым образом и спектром операторных матриц третьего порядка, действующих в прямой сумме гильбертовых пространств. Для блочно-треугольных, скалярных, самосопряжённых операторных матриц, а также для операторной матрицы в урезанном подпространстве фоковского пространства вычислены спектр, обычный и кубический числовые образы. Примеры показывают, что кубический числовой образ локализует спектр точнее, чем обычный числовой образ, и позволяет обнаруживать спектральные лакуны.

Ключевые слова: операторная матрица, гильбертово пространство, числовой образ, кубический числовой образ, спектр, существенный спектр, дискретный спектр, спектральное включение, фоковское пространство.

EXAMPLES ON THE LOCATION OF THE SPECTRUM OF A THIRD-ORDER OPERATOR MATRIX WITHIN ITS NUMERICAL RANGE

Shodmonova Nozima Ruzimurod kizi
Bukhara State University,
first-year master's student in Mathematics
E-mail: nozimashodmonova48@gmail.com

Annotation: In these theses, the relationship between the cubic numerical range and the spectrum of third-order operator matrices acting in a direct sum of Hilbert spaces is studied by means of concrete examples. The spectrum and the usual and cubic numerical ranges are computed for block triangular,

© 2026 International Conference on Artificial Intelligence and Applications . All Rights Reserved.

scalar and self-adjoint operator matrices, as well as for an operator matrix acting in the truncated subspace of a Fock space. The examples show that the cubic numerical range localizes the spectrum more precisely than the usual numerical range and makes it possible to detect spectral gaps.

Key words: operator matrix, Hilbert space, numerical range, cubic numerical range, spectrum, essential spectrum, discrete spectrum, spectral inclusion, Fock space.

Asosiy tuşunçalar. Çiziqli çegaralangan operatorning spektri, xos qiymatlari va regulyar nuqtalari funksional analizning asosiy tuşunçalaridan hisoblanadi [1]. Hilbert fazosidagi çiziqli operatorlar nazariyasi va ularning spektral xossalari klassik monografiyalarda batafsil bayon qilingan [2]. Öz-öziga qöşma operatorlar spektrining nuqtali, muhim va diskret qismlari ham yaxşi örganilgan [3]. Bu tuşunçalar özbek tilidagi darsliklarda ham bayon qilingan [4]. Ularga doir köplab misol va masalalar işlab çiqilgan [5]. Sonli tasvir va uning xossalariga doir masalalar ham ma'lum [6]. Hilbert fazosida aniqlangan çiziqli çegaralangan operatorlarning spektrini lokalizatsiya qilişda sonli tasvir muhim vosita hisoblanadi. Biroq odatdagi sonli tasvir qavariq töplam bölgani uçun spektrdagi lakunalar (böşliqlar) haqida ma'lumot bermaydi. Şu sababli ikkinçi tartibli operatorli matritsalar uçun kvadratik sonli tasvir, n-tartibli operatorli matritsalar uçun esa blok sonli tasvir tuşunçasi kiritilgan [7].

X_1, X_2 va X_3 kompleks Hilbert fazolari, $X := X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$ ularning töğri yiğindisi bölsin. X fazodagi har bir çiziqli çegaralangan B operator uçinçi tartibli operatorli matritsa körinişida tasvirlanadi:

$$B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}, \qquad B_{ij}:X_j \to X_i, \quad i,j=1,2,3. \qquad (1)$$

$S^3 := \{f=(f_1,f_2,f_3)\in X: \ \| f_i \| =1, i=1,2,3\}$ birlik sferalarning Dekart köpaytmasi bölsin. Har bir $f\in S^3$ uçun $B_f := ((B_{ij}f_j,f_i))_{i,j=1}^3 \in M_3(\mathbb{C})$ sonli matritsani tuzamiz.

Ta'rif [7]. Uşbu

$$W^3(B) := \bigcup_{f\in S^3} \sigma_p(B_f) \qquad (2)$$

töplamga B operatorli matritsaning (1) körinişga mos kubik sonli tasviri deyiladi.

Kubik sonli tasvirning quyidagi xossalari ma'lum [7]: $W^3(B)\subset W(B)$, bu yerda $W(B)=\{(Bx,x): x\in X, \ \| x \| =1\}$ odatdagi sonli tasvir; $W^3(B)$ köpi bilan uçta boğlamli komponentdan iborat; $B=B^*$ bölsa, $W^3(B)\subset\mathbb{R}$; B blok uçburçakli bölsa, $W^3(B)=W(B_{11})\cup W(B_{22})\cup W(B_{33})$. Asosiy xossa **spektral qamraş** xossasidir [7]:

$$\sigma_p(B)\subset W^3(B), \qquad \sigma(B)\subset \overline{W^3(B)}. \qquad (3)$$

Quyidagi misollarda (3) munosabatlarning qanday bajarilişi hamda $W^3(B)$ va $W(B)$ töplamlar spektrni qançalik aniq lokalizatsiya qilişi körsatiladi.

1-misol (blok uçburçakli operatorli matritsa). $X_1=X_2=X_3=L^2[0;1]$ bölsin va

$$B=\begin{pmatrix} T & I & 0 \\ 0 & T+2I & I \\ 0 & 0 & T+4I \end{pmatrix}, \qquad (Tg)(t)=t\,g(t),$$

operatorli matritsani qaraymiz, bu yerda I birlik operator.

Yeçiş: $(Tg,g)=\int_0^1 t\,|g(t)|^2dt$ va $\| g \| =1$ bölgani uçun $W(T)=(0;1)$ oçiq interval böladi. B blok uçburçakli bölgani uçun

$$W^3(B)=(0;1)\cup(2;3)\cup(4;5).$$

Diagonal elementlarning spektrlari $\sigma(T)=[0;1]$, $\sigma(T+2I)=[2;3]$, $\sigma(T+4I)=[4;5]$ özaro kesişmaydi, şuning uçun $\sigma(B)=[0;1]\cup[2;3]\cup[4;5]$.

Demak, $\sigma(B)=\overline{W^3(B)}$, ammo $0,1,2,3,4,5\in\sigma(B)$ nuqtalar $W^3(B)$ ga tegişli emas. Bu (3) dagi yopilma oliş şartini taşlab bölmasligini körsatadi. Odatdagi sonli tasvir $W(B)$ esa qavariq bölib, (0;5) intervalni töla öz içiga oladi, ya'ni (1;2) va (3;4) lakunalarni sezmaydi.

© 2026 International Conference on Artificial Intelligence and Applications . All Rights Reserved.

Javob: $\sigma(B)=\overline{W^3(B)}=[0;1]\cup[2;3]\cup[4;5]$.

2-misol (skalyar elementli hol). $X_1=X_2=X_3=\mathbb{C}$ bölganda S^3 ning elementlari $f=(e^{i\varphi_1},e^{i\varphi_2},e^{i\varphi_3})$ körinişda böladi va B_f matritsa B ga unitar öxşaş. Şu sababli $W^3(B)=\sigma(B)$ [7]. Masalan,

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&1&3\end{pmatrix}$$

uçun xarakteristik tenglama $(2-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda)-2]=0$ bölib,

$$W^3(B)=\sigma(B)=\{2-\sqrt{3};\ 2;\ 2+\sqrt{3}\}\approx\{0{,}2679;\ 2;\ 3{,}7321\}.$$

Odatdagi sonli tasvir esa butun kesmani beradi: $W(B)=[2-\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3}]$.

3-misol (öz-öziga qöşma operatorli matritsa, spektral lakunalar). $X=\mathbb{C}^2\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ fazoda

$$B=\begin{pmatrix}B_{11}&b&0\\b^*&4&1/2\\0&1/2&8\end{pmatrix},\qquad B_{11}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

operatorli matritsani qaraymiz. $B=B^*$ bölgani uçun $W^3(B)\subset\mathbb{R}$.

Yeçiş: $f_1=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{C}^2$, $|\xi_1|^2+|\xi_2|^2=1$ va $|f_2|=|f_3|=1$ bölsin. U holda

$$B_f=\begin{pmatrix}\alpha&\beta&0\\\bar{\beta}&4&1/2\\0&1/2&8\end{pmatrix},\qquad \alpha=|\xi_2|^2\in[0;1],\quad |\beta|=1/2\,|\xi_1+\xi_2|\le\sqrt{2}/2\,.$$

α va β parametrlar böyiça B_f ning xos qiymatlarini hisoblab (sonli hisoblaş Python dasturida bajarildi), quyidagini hosil qilamiz:

$$W^3(B)=[-0{,}0658;\ 0{,}9245]\cup[6-\sqrt{17}/2\,;\ 4{,}0787]\cup[6+\sqrt{17}/2\,;\ 8{,}0626],$$

bu yerda $6\mp\frac{\sqrt{17}}{2}\approx 3{,}9384;\ 8{,}0616$ sonlari $\beta=0$ holga mos keladi. B ning xos qiymatlari esa

$$\sigma(B)=\{-0{,}0658;\ 0{,}9245;\ 4{,}0787;\ 8{,}0626\}.$$

Körinib turibdiki, $\sigma(B)\subset W^3(B)$ va $W^3(B)$ uçta ajralgan komponentdan iborat. Şu sababli $(0{,}9245;\ 3{,}9384)$ va $(4{,}0787;\ 8{,}0616)$ intervallar spektral lakunalar böladi. Odatdagi sonli tasvir $W(B)=[-0{,}0658;\ 8{,}0626]$ bu lakunalarni aniqlay olmaydi. Şuningdek, B ning eng kiçik va eng katta xos qiymatlari $W^3(B)$ ning çetki nuqtalari bilan ustma-ust tuşadi.

4-misol (Fok fazosidagi operatorli matritsa). $T=[-\pi;\pi]$ bir ölçamli tor, $\mathscr{H}=\mathbb{C}\oplus L^2(T)\oplus L^2(T^2)$ Fok fazosining qirqilgan uç zarraçali qism fazosi bölsin [8]. Uşbu fazoda

$$A_\mu=\begin{pmatrix}A_{00}&\mu A_{01}&0\\\mu A_{01}^*&A_{11}&\mu A_{12}\\0&\mu A_{12}^*&A_{22}\end{pmatrix},\qquad \mu>0,$$

operatorli matritsani qaraymiz. Bu yerda $A_{00}f_0=\varepsilon f_0$, $A_{01}f_1=\int_T v(t)f_1(t)\,dt$, $(A_{11}f_1)(x)=(\varepsilon+u(x))f_1(x)$, $(A_{12}f_2)(x)=\int_T v(t)f_2(x,t)\,dt$, $(A_{22}f_2)(x,y)=(\varepsilon+u(x)+u(y))f_2(x,y)$. Aniq qiymatlar sifatida

$$\varepsilon=0,\quad \mu=1,\quad u(x)=1-\cos x,\quad v(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

ni olamiz. U holda $m=\min u=0$, $M=\max u=2$, $\|v\|=1$.

Yeçiş: A_μ ga mos Fredgolm determinanti $\Delta_\mu(z)=\varepsilon-z-\mu^2\int_T\frac{v^2(t)\,dt}{\varepsilon+u(t)-z}$ ni hisoblaymiz. $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{a-\cos t}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$, $a>1$, formuladan

$$\Delta_1(z)=-z\mp\frac{1}{\sqrt{z^2-2z}},\qquad z<0\ \ (\text{mos ravişda } z>2)$$

© 2026 International Conference on Artificial Intelligence and Applications . All Rights Reserved.

kelib çiqadi. $\Delta_1(z)=0$ tenglama $z^4-2z^3-1=0$ ga keladi va uning haqiqiy ildizlari $z_1\approx-0{,}7167$, $z_2\approx2{,}1069$. Demak, ma'lum natijaga köra muhim spektr tarmoqlari quyidagiça böladi [8]:

$$\sigma_{two}(A_1)=[-0{,}7167;\ 1{,}2833]\cup[2{,}1069;\ 4{,}1069],\qquad \sigma_{three}(A_1)=[0;\ 4],$$
$$\sigma_{ess}(A_1)=[-0{,}7167;\ 4{,}1069].$$

$\Omega_1(z)=\varepsilon-z-\mu^2\int_T \frac{v^2(t)\,dt}{\Delta_1(z-u(t))}$ funksiya muhim spektrdan tashqaridagi har bir oraliqda qat'iy kamayuvçi bo'lib, $z\to-\infty$ da $+\infty$ ga, muhim spektrning çap çetida $-\infty$ ga, öng çetida $+\infty$ ga, $z\to+\infty$ da esa $-\infty$ ga intiladi. Demak, muhim spektrdan çapda ham, öngda ham bittadan xos qiymat mavjud. Ularni sonli hisoblaş $z_0\approx-0{,}9638$ va $z_0'\approx4{,}10719$ ni beradi. Ikkinçi xos qiymat muhim spektr çetiga juda yaqin joylaşgan: $z_0'-4{,}10692\approx2{,}7\cdot10^{-4}$. Demak,

$$\sigma(A_1)=\{-0{,}9638\}\cup[-0{,}7167;\ 4{,}1069]\cup\{4{,}1072\}.$$

Endi kubik sonli tasvir yordamida olingan baholaşni tekşiramiz [8]:

$$\min\sigma(A_\mu)\geq\varepsilon+m-2\sqrt{\frac{m^2+2\mu^2\,/\!/\,v\,/\!/^2}{3}}=-2\sqrt{2/3}\approx-1{,}6330,$$

$$\max\sigma(A_\mu)\leq\varepsilon+M+2\sqrt{\frac{M^2+2\mu^2\,/\!/\,v\,/\!/^2}{3}}=2+2\sqrt{2}\approx4{,}8284.$$

Haqiqatan ham, $-1{,}6330<-0{,}9638$ va $4{,}1072<4{,}8284$. Qözğalişlar nazariyasiga asoslangan baholaş esa $[-1{,}4142;\ 5{,}4142]$ oraliqni beradi [8]. Ikkala baholaşni birlaştirib, $\sigma(A_1)\subset[-1{,}4142;\ 4{,}8284]$ ni hosil qilamiz. Bunda yuqori çegara uçun kubik sonli tasvirga asoslangan baholaş aniqroq ekanini köramiz.

Javob: $\sigma(A_1)=\{-0{,}9638\}\cup[-0{,}7167;\ 4{,}1069]\cup\{4{,}1072\}\subset[-1{,}4142;\ 4{,}8284]$.

Xulosa: Keltirilgan misollar uçinçi tartibli operatorli matritsa spektrining kubik sonli tasvirdagi joylaşuvi haqida quyidagi xulosalarni beradi. Birinçidan, spektral qamraş xossasidagi yopilma oliş şarti muhim: çeksiz ölçamli holda spektr nuqtalari $W^3(B)$ ning çegarasida yotişi mumkin. Ikkinçidan, skalyar elementli holda kubik sonli tasvir spektr bilan ustma-ust tuşadi. Uçinçidan, kubik sonli tasvir qavariq bölmagani uçun odatdagi sonli tasvirdan farqli ravişda spektral lakunalarni aniqlaş imkonini beradi. Törtinçidan, Fok fazosidagi model uçun kubik sonli tasvirga asoslangan baholaş spektrning yuqori çegarasini boşqa usullarga nisbatan aniqroq beradi. Bu natijalardan uçinçi tartibli operatorli matritsalarning spektral xossalarini örganişda foydalaniş mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RÖYXATI

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
2. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966.
3. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977.
4. Abdullayev J.I., G'anixo'jayev R.N., Shermatov M.H., Egamberdiyev O.I. Funksional analiz va integral tenglamalar. – Toshkent: EL PRESS, 2013. – 458 b.
5. Abdullayev J.I., Eshqobilov Yu.X., Ikromov I.A., G'anixo'jayev R.N. Funksional analiz (misol va masalalar yechish). II qism. – Toshkent, 2016.
6. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. – М.: Мир, 1970.
7. Tretter C. Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. – London: Imperial College Press, 2008.
8. Sharipova M.Sh. Parametrga bog'liq uchinchi tartibli operatorli matritsa spektri uchun baholashlar: fiz.-mat. fan. bo'yicha falsafa doktori (PhD) diss. avtoreferati. – Urganch, 2026. – 40 b.

© 2026 International Conference on Artificial Intelligence and Applications . All Rights Reserved.