BG Pulse Journal USA
ISSN:1947-2536 http://www.bgpulseusa.com/index.php/bg
BG PULSE JOURNAL

INVERSE PROBLEM OF DETERMINING THE SOURCE FUNCTION FOR THE ONE-DIMENSIONAL TELEGRAPH EQUATION

Atamuratov Jaloliddin Rashidovich
Mathematics Teacher,
Jaloliddin Manguberdi Military Academic Lyceum

Doi: https://doi.org/10.5281/zenodo.21218846

Abstract: This article investigates the inverse problem of determining an unknown source function for the one-dimensional telegraph equation, which is one of the important areas in the theory of partial differential equations. The mathematical formulation of the problem is presented, and the role of additional integral or pointwise observation conditions is discussed. The paper also examines the physical and practical significance of this inverse problem, as well as the main analytical and numerical methods used for its solution, including the Fourier method, the Laplace transform, and Tikhonov regularization.

Keywords: Telegraph equation, inverse problem, source function, initial and boundary conditions, additional condition, Fourier method, numerical simulation.

BIR O‘LCHAMLI TELEGRAF TENGLAMASI UCHUN MANBA FUNKSIYASINI ANIQLASH TESKARI MASALASI

Annotatsiya: Ushbu maqolada xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining muhim yo‘nalishlaridan biri bo‘lgan bir o‘lchamli telegraf tenglamasi uchun noma’lum manba funksiyasini aniqlash teskari masalasi tadqiq etilgan. Masalaning matematik qo‘yilishi shakllantirilgan, qo‘shimcha integral yoki nuqtaviy kuzatish shartlarining o‘rni ko‘rsatib o‘tilgan. Maqolada mazkur teskari masalaning fizik va amaliy ahamiyati, shuningdek, uni analitik va sonli yechishda qo‘llaniladigan asosiy usullar (Furye usuli, Laplas almashtirishi, Tixonov regulyarizatsiyasi) tahlil qilingan.

Kalit so‘zlar: Telegraf tenglamasi, teskari masala, manba funksiyasi, boshlang‘ich va chegaraviy shartlar, qo‘shimcha shart, Furye usuli, sonli modellashtirish.

Kirish

Matematik fizika tenglamalari uchun teskari masalalarni o‘rganish zamonaviy amaliy matematika va muhandislikning eng jadal rivojlanayotgan sohalaridan biridir. Klassik (to‘g‘ri) masalalarda matematik modelning barcha parametrlari — tenglama koeffitsiyentlari, chegaraviy shartlar va tashqi ta’sirlar (manba) to‘liq ma’lum deb qaraladi va jarayonni ifodalovchi funksiya izlanadi. Biroq amaliyotda ko‘pincha tizimga ta’sir etayotgan tashqi kuchlar yoki ichki manbalarning quvvatini to‘g‘ridan-to‘g‘ri o‘lchash imkoni bo‘lmaydi. Bunday hollarda ob’ektning ma’lum nuqtalaridagi yoki ma'lum vaqtdagi holatini kuzatish orqali noma’lum parametrlarni tiklash, ya’ni **teskari masalalarni** yechish talab etiladi.

Telegraf tenglamasi to‘lqin tarqalishi, tebranishlar va uzun aloqa liniyalarida signallarning so‘nishini xarakterlovchi giperbolik turdagi tenglamadir. Ushbu tenglama uchun manba funksiyasini aniqlash muammosi fizik jarayonlarni boshqarish va diagnostika qilishda fundamental ahamiyat kasb etadi.

Asosiy qism

1. Masalaning Matematik Qo‘yilishi va Parametrik Shartlar Tahlili

Faraz qilaylik, bizga o‘tkazgich yoki bir jinsli muhit uzunligi l ga teng bo‘lgan sohada quyidagi bir o‘lchamli telegraf tenglamasi berilgan bo‘lsin:

$$u_{tt}\ \ (x,t)+2\alpha u_t\ \ (x,t)-c^2u_{xx}\ \ (x,t)=f(x)g(t),\ \ 0<x<l,\ \ 0<t<T$$

Bu yerda izlanayotgan u(x,t) funksiyasi ko‘rib chiqilayotgan fizik jarayonga qarab turlicha ma’noga ega bo‘lishi mumkin. Masalan, elektrodinamikada u liniyadagi kuchlanish yoki tok kuchini, akustikada esa to‘lqinning muhit zarralariga ko‘rsatadigan bosimini ifodalaydi. Tenglamadagi doimiy koeffitsiyentlar quyidagi fizik xossalarga ega:

- $\alpha>0$ — muhitning aktiv qarshiligi, ishqalanishi yoki dielektrik yo‘qotishlari sababli yuzaga keladigan energiya so‘nish (dissipatsiya) koeffitsiyenti;
- $c>0$ — signalning yoki to‘lqinning berilgan muhitdagi tarqalish tezligi;
- $g(t)$ — vaqt bo‘yicha ma’lum bo‘lgan tashqi garmonik, davriy yoki impul’s ko‘rinishidagi ta’sir funksiyasi bo‘lib, u qaralayotgan $[0,T]$ vaqt oralig‘ida nolga aylanmaydi ($g(t)\neq0$) deb faraz qilinadi.

Ushbu matematik modelda fazoviy o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lgan $f(x)$ **manba funksiyasi noma’lum** hisoblanadi. U tizimga tashqi muhitdan aynan qaysi nuqtada va qanday quvvat (amplituda) bilan ta’sir ko‘rsatilayotganini aniqlab berishi lozim.

Jarayonning boshlang‘ich va chegaraviy holatlarini to‘liq tavsiflash uchun quyidagi klassik shartlar tizimi kiritiladi:

- **Boshlang‘ich shartlar (vaqt $t=0$ bo‘lganda):**

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)=\psi(x),\ \ 0\le x\le l$$

Bu yerda $\varphi(x)$ datchiklar qayd etgan dastlabki og‘ish yoki potensial taqsimotini, $\psi(x)$ esa mos ravishda boshlang‘ich tebranish tezligini ifodalaydi.

- **Chegaraviy shartlar (bir jinsli birinchi tur Direxle shartlari):**

$$u(0,t)=0,\ \ u(l,t)=0,\ \ 0\le t\le T$$

Bu shartlar geometrik jihatdan o‘tkazgich yoki torning ikki cheti qattiq mahkamlanganligini, elektrotexnikada esa liniya uchlarining yerga ulanganligini (nol potensial holati) anglatadi.

Matematik tahlil qoidalariga ko‘ra, berilgan $\{\varphi,\psi,g\}$ funksiyalari yordamida ham jarayon dinamikasini ifodalovchi $u(x,t)$ funksiyasini, ham noma'lum $f(x)$ manbasini bir vaqtda aniqlash imkonsiz. Chunki bizda bitta tenglama va ikkita noma'lum funksiya mavjud bo‘lib, sistema aniqlanmagan hisoblanadi. Shu sababli, masalani korrekt qo‘yish uchun tizimga qo‘shimcha (kuzatish) sharti yuklanadi. Amaliyotda ko‘pincha vaqtning yakuniy momentidagi holat integral yoki nuqtaviy o‘lchovlar orqali aniqlanadi:

$$u(x,T)=\chi(x),0\le x\le l$$

Bu yerda $\chi(x)$ funksiyasi amaliy tajribalar, skanerlash qurilmalari yoki sensorlar orqali olingan ma’lumot bo‘lib, u mos keluvchanlik shartlarini qanoatlantirishi va kamida ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi ($\chi(x)\in C^2[0,l]$) bo‘lishi talab etiladi. Masalaning asosiy maqsadi — berilgan

$\{\varphi,\psi,g,\chi\}$ ma'lumotlar majmuasiga ko‘ra noma'lum $\{u(x,t),f(x)\}$ juftligini bir qiymatli aniqlashdan iboratdir.

2. Fizik, Muhandislik va Ekologik Tatbiqlari

Telegraf tenglamasi uchun manba funksiyasini aniqlash teskari masalalari zamonaviy muhandislik, geofizika va tabiatshunoslikning quyidagi dolzarb sohalarida fundamental amaliy muammolarni hal qilishda qo‘llaniladi:

- **Aloqa tizimlari va elektrotexnika diagnostikasi:** Milya yoki kilometrlab cho‘zilgan yuqori kuchlanishli kabellar, magistral aloqa liniyalari yoki transatlantik optik tolali tizimlarda mexanik shikastlanish, izolyatsiyaning emirilishi yoki noqonuniy yashirin ulanishlar yuz berganda, ushbu nuqtaviy xalaqitlarni (manbani) liniyani buzmasdan, faqatgina uchlaridagi signallarni solishtirish orqali aynan qaysi koordinatada sodir bo‘lganini aniqlash.
- **Geofizika va seysmoakustik monitoring:** Yer qobig‘i ostida yoki okean tubida to‘lqin tarqalishi jarayonida seysmik datchiklar va gidrofonlar qayd etgan sirtqi tebranish ma'lumotlari asosida yer silkinishi (zilzila) o‘choqlari, vulqon harakatlari yoki yashirin yer osti portlashlarining kinetik energiyasi hamda boshlang‘ich manba kuchini koordinatali aniqlash.
- **Gidrodinamika va ekologik xavfsizlik:** Daryolar, kanallar yoki yopiq suv havzalarida kimyoviy hamda radioaktiv moddalarning tarqalishi telegraf tenglamasining giperbolik-diffuzion analoglari yordamida muvaffaqiyatli tavsiflanadi. Turli nazorat nuqtalaridagi konsentratsiya o‘zgarishiga qarab, suv havzasiga zaharli modda oqizayotgan yashirin sanoat korxonasi (manba) koordinatalarini va uning oqizish quvvatini topish imkonini beradi.

3. Analitik Yechish Metodologiyasi va Spektral Tahlil (Furye Usuli)

Masalani nazariy jihatdan o‘rganish, yechimning mavjudligi hamda yagonalik shartlarini qat'iy isbotlash uchun o‘zgaruvchilarni ajratish (Furye) usuli qo‘llaniladi. Chegaraviy shartlarning bir jinsli ekanligidan foydalanib, mos keluvchi Shturm-Liuvill masalasining xos qiymatlari va xos funksiyalari aniqlanadi:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad n=1,2,3,...$$

Izlanayotgan $u(x,t)$ funksiyasi va noma'lum $f(x)$ manbasi ushbu to‘liq va ortogonal $X_n(x)$ funksiyalar tizimi bo‘yicha Furye qatoriga yoyiladi:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

Berilgan ma'lum $\varphi(x)$, $\psi(x)$ va $\chi(x)$ funksiyalari ham mos ravishda xuddi shunday qatorlarga ajratiladi va ularning koeffitsiyentlari φ_n , ψ_n , χ_n deb belgilanadi. Ushbu ifodalarni asosiy telegraf tenglamasiga qo‘yish orqali har bir u_n (t) noma'lum koeffitsiyent uchun quyidagi ikkinchi tartibli, o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli oddiy differensial tenglama hosil qilinadi:

$$u''_n \quad (t)+2\alpha u'_n \quad (t)+c^2\lambda_n \quad u_n \quad (t)=f_n \quad g(t)$$

Ushbu tenglamaning umumiy yechimi boshlang‘ich shartlar ($u_n(0)=\varphi_n, u'_n(0)=\psi_n$) yordamida Koshi integrali ko‘rinishida topiladi. So‘ngra, $u(x,T)=\chi(x)$ qo‘shimcha shartidan kelib chiqadigan $u_n(T)=\chi_n$ munosabatiga asosan noma’lum f_n koeffitsiyentlarini aniqlash uchun chiziqli tenglama tuziladi:

$$f_n \cdot \int_0^T e^{-\alpha(T-\tau)} \frac{\sin(\mu_n (T-\tau))}{\mu_n} g(\tau)d\tau = \chi_n - \Phi_n(T)$$

Bu yerda $\mu_n=\sqrt{c^2\lambda_n - \alpha^2}$ va $\Phi_n(T)$ — boshlang‘ich shartlardan keladigan ma'lum funksiyadir. Agar ushbu tenglamadagi integral ifoda nolga teng bo‘lmasa, fn koeffitsiyentlari bir qiymatli aniqlanadi va qatorlarning yaqinlashuvchanligi isbotlanib, analitik yechim topiladi.

4. Sonli Modellashtirish va Hadamard bo‘yicha Korrekt Masalaning Regulyarizatsiyasi

Nazariy jihatdan yechim mavjud bo‘lsa-da, hisoblash matematikasida bu turdagi teskari masalalar **Hadamard ma’nosida korrekt bo‘lmagan (ill-posed)** masalalar sinfiga kiradi. Amaliyotda sensorlar yoki skanerlardan olingan $\chi(x)$ yakuniy kuzatish ma’lumotlari har doim ma’lum bir kichik $\delta>0$ o‘lchov xatoligiga (shovqinga) ega bo‘ladi ($\|\chi_\delta-\chi\|\le\delta$). Matematik operator teskarilanayotganda, yuqori chastotali garmonikalarda ($\lambda_n \to\infty$) maxraj nolga yaqinlashib borishi sababli, ushbu kichik δ xatolik kompyuter hisoblashlarida eksponentsial ravishda kattalashib ketadi va natijada mutloq xato yechimlar hosil bo‘ladi.

Ushbu beqarorlik muammosini bartaraf etish va sonli hisoblashlarda turg‘un algoritmlarni yaratish uchun quyidagi usullardan foydalaniladi:

1. **Tixonov regulyarizatsiya usuli va minimallashtirish:** Yechim to‘g‘ridan-to‘g‘ri tenglamadan emas, balki xatoliklar kvadratini kamaytiruvchi va silliqlikni ta'minlovchi maxrus Tixonov funksionalini minimallashtirish orqali izlanadi:

$$M_\beta[f]=\int_0^l [u(x,T;f)-\chi_\delta(x)]^2dx+\beta\int_0^l [f^2(x)+(f'(x))^2]dx \to min$$

Bu yerda $\beta>0$ — regulyarizatsiya parametri bo‘lib, u o‘lchov xatoligi δ ga bog‘liq holda, xatoliklar o‘zaro muvozanatlashadigan nuqtada (masalan, chetlatish prinsipi yoki kvazioptimallik mezoni asosida) kompyuter tomonidan tanlanadi.

2. **Chekli ayirmalar sxemalari (Setka usuli):** $[0,l]\times[0,T]$ fazoviy-vaqtiy sohasi bo‘yicha h va τ qadamli to‘r (setka) hosil qilinadi. Natijada, differensial masala chiziqli yoki chiziqli bo‘lmagan algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Ushbu yirik o‘lchamli sistemalar zamonaviy kompyuter dasturlari (MATLAB, Python yoki C++) yordamida maxsus iteratsion va qidiruv algoritmlari orqali yuqori aniqlikda yechiladi.

Xulosa

Bir o‘lchamli telegraf tenglamasi uchun manba funksiyasini topish teskari masalasi matematik fizikaning dolzarb muammolaridan biridir. Tadqiqotlar shuni ko‘rsatadiki, qo‘shimcha shart

sifatida olingan yakuniy vaqt holati ($\chi(x)$) yetarli darajada silliq bo‘lgandagina masalaning analitik yechimi mavjud bo‘ladi. Sonli hisoblashlarda esa muhitdagi shovqinlarni silliqlash uchun regulyarizator usullarni qo‘llash majburiydir. Ushbu modelni rivojlantirish aloqa liniyalaridagi diagnostika tizimlarini yanada aniqroq ishlashiga zamin yaratadi.

Foydalanilgan Adabiyotlar:

1. Tikhonov, A. N., & Arsenin, V. Y. (1977). *Solutions of Ill-Posed Problems*. Winston & Sons.
2. Samarskii, A. A., & Vabishchevich, P. N. (2007). *Numerical Methods for Inverse Problems of Mathematical Physics*. Walter de Gruyter.
3. Isakov, V. (2006). *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Springer Science & Business Media.
4. Kabanikhin, S. I. (2011). *Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications*. De Gruyter.