BG Pulse Journal USA
ISSN:1947-2536 http://www.bgpulseusa.com/index.php/bg
BG PULSE JOURNAL

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ТРИКОМИ С УСЛОВИЕМ СМЕЩЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Мирсабурова Гулбахор Мирахматовна,
mirsaburovagulbahor26@gmail.com
Ташкентский государственный транспортный университет
doi: https://doi.org/10.5281/zenodo.22333028

Аннотация: в статье рассматривается обобщенная задача Трикоми для уравнения смешанного типа. В данной задаче часть характеристики не задается классическим условием Трикоми, а вместо него вводится условие со смещением. Для исследования поставленной задачи используются интегральные представления решения в эллиптической и гиперболической частях области. В результате задача сводится к системе интегральных уравнений Трикоми со смещением. С помощью метода регуляризации Карлемана–Векуа эта система преобразуется в интегральное уравнение, которое после соответствующей замены переменных приводится к уравнению Винера–Хопфа. Исследование индекса полученного уравнения показывает, что он равен нулю. На этой основе устанавливается однозначная разрешимость соответствующего интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Полученные результаты позволяют обосновать существование и единственность решения рассматриваемой обобщенной задачи Трикоми.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, задача Трикоми, условие со смещением, интегральное уравнение, метод Карлемана–Векуа, уравнение Винера–Хопфа, уравнение Фредгольма.

Классическая задача Трикоми предполагает задание краевого условия на характеристиках гиперболической части области. Однако в ряде прикладных и теоретических задач возникает необходимость рассматривать случаи, когда часть характеристики освобождается от краевого условия, а недостающее условие заменяется условием со смещением. Такой подход позволяет расширить класс рассматриваемых краевых задач и получить новые условия разрешимости для уравнений смешанного типа. Задачи для уравнений смешанного типа с различными вариантами ослабления классического условия Трикоми и его замены дополнительными условиями исследовались в работах отечественных и зарубежных авторов. Особое место среди них занимают исследования А.М. Нахушева, связанные с краевыми задачами со смещением и их применением к уравнениям смешанного типа.

$$(sign\, y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0 / y)u_y = 0 \quad , \qquad (1)$$

где $-m/2 \quad \beta_0 < 1$, в конечной односвязной области D комплексной плоскости $z = x + iy$ ограниченной нормальной кривой $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2} = 1$ с концами в точках $A = A(-1,0)$, $B = B(1,0)$ и характеристиками AC и BC уравнения (1).

Обозначим через D^+ и D^- части области D , лежащие, соответственно, в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1 , соответственно, точки пересечения характеристик AC и BC с характеристикой исходящей из точки $E(c,0)$, где $c \quad I = (-1,1)$ – интервал оси $y = 0$.

В задаче Трикоми во всех точках характеристики AC задается значение искомой функции: $u(x,y)\big|_{AC}=\psi(x)$. В настоящей главе исследуется корректности задачи, где часть характеристики AC освобождена от краевого условия и это не достающее условие Трикоми эквивалентно заменена условием смещения А.М. Нахушева [4].

Задачи для уравнения смешанного типа, где часть характеристики AC освобождении от краевого условия Трикоми и это не достающее условие Трикоми эквивалентно заменена другими условиями исследованы в работах [1,2,3,5].

Постановка задачи TH **.**

Задача TH **.** Требуется найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $u(x,y)$ $C(\overline{D})$;
2. $u(x,y)$ $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;
3. $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 [6] в области D^-;
4. На интервале вырождения I имеет место следующее условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\quad x\quad \overline{I}, \qquad (2)$$

причём эти пределы при $x=\pm1, x=c$ могут иметь особенности порядка ниже $1-2\beta$, где $\beta=(m+2\beta_0)/2(m+2)$;

5. $$u(x,y)|_{\sigma_0}=\varphi(x),\quad -1\quad x\quad 1, \qquad (3)$$

$$u\,|_{AC_0}=\psi(x),\quad -1\quad x\quad (c-1)/2, \qquad (4)$$

$$a_0(x)(1+x)^{\beta}D_{c,x}^{1-\beta}u\ \ \theta_0(x)\ +b_0(x)(1-x)^{\beta}D_{x,1}^{1-\beta}u\left[\theta_1(x)\right]=c_0(x),\quad c\quad x<1. \qquad (5)$$

Здесь $D_{c,x}^{1-\beta}$, $D_{x,1}^{1-\beta}$ – операторы дробного дифференцирования порядка $1-\beta$; $\theta_0(x)$ и $\theta_1(x)$ соответственно аффиксы точки пересечения характеристик AC и BC с характеристикой, исходящей из точки $M(x_0,0)$, где x_0 $[c,1]$:

$$\theta_0(x_0)=\frac{x_0-1}{2}-i\ \frac{m+2}{4}(1+x_0)^{\frac{2}{m+2}},\quad \theta_1(x_0)=\frac{x_0+1}{2}-i\ \frac{m+2}{4}(1-x_0)^{\frac{2}{m+2}}. \qquad (6)$$

Заданные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $a_0(x)$, $b_0(x)$, $c_0(x)$ непрерывно дифференцируемы в замыкании множества их определения, причем

$$a_0^2(x)+b_0^2(x)\quad 0,\ b(c)=0,\ b(1)=0$$
$$d(x)=a_0(x)+b_0(x)>0\quad ,\ x\quad (c,1) \qquad (7)$$
$$d(c)+\lambda\pi\,ctg3\alpha\pi\,(a_0(c)-b_0(c))\quad 0$$

а функция $\varphi(x)$ представима в виде

$$\varphi(x)=(1-x^2)\widetilde{\varphi}(x) \qquad (8)$$

где $\varphi(x)$ $C^1(\bar{I})$, $\psi(-1)=0$.

Заметим, что задача TH является обобщением задачи Ф.Трикоми [7] и А.М. Нахушева [8], для предельного значения $c=-1$ из задачи TH следует задача А.М. Нахушева [8], а для предельного значения $c=1$, при дополнительном условии

$$a_0(x)D_{c,x}^{1-\beta}\psi(0)\big|_{\substack{x=1\\c=1}}+b_0(x)D_{x,1}^{1-\beta}\varphi(1)\big|_{x=1}=c_0(1)\,, \qquad (9)$$

следует задача Ф.Трикоми [7].

Существования решения задачи TH с использованием интегрального представления решения задача Дирихле в области D^+ и формулы Дарбу дающее в области D^- решение видоизмененной задачи Коши эквивалентно сводиться к системе интегральных уравнений Трикоми со сдвигом в несуммируещей части ядра.

$$D(x)\nu_1(x)+K(x)\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)}\right)\nu_1(t)dt=$$
$$=\mu\int_{-1}^{1}\frac{a\nu_0(t)dt}{at-bx-1}+\tilde{H}_0[\nu_0]+\tilde{H}_1[\nu_1]+F_1(x)\,,\ x\quad I \qquad (10)$$

$$\nu_0(t)+\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{(ax-b)(at-b)}\right)\nu_0(t)dt=$$
$$=\lambda\int_{-1}^{1}\frac{b\nu_1(t)dt}{bt-ax+1}+\mathrm{T}_1[\nu_1]+F_0(x),\ x\quad I \qquad (11)$$

где $\nu_0(x)=\nu(ax-b),\ \nu_1(x)=\nu(bx+a),\ \ \tilde{H}_0[\nu_0],\tilde{H}_1[\nu_1],\mathrm{T}_1[\nu_1]$ -регулярные операторы , а $F_0(x)$ и $F_1(x)$ известные функции.

В выводится первое и второе функциональные соотношения между неизвестными функциями $\tilde{\nu}_0(x)$ и $\nu_1(x)$. К уравнениям (10) и (11) применяя метод регуляризации Карлеман-Векуа соответственно получим уравнения

$$\nu_1(x)=-\int_{-1}^{1}n\left(\frac{1+x}{1+t}\right)\frac{\tilde{\nu}_0(t)}{1+t}dt+\overline{\overline{N}}_0[\tilde{\nu}_0]+N_1[\nu_1]+F_3(x) \qquad (12)$$

$$\tilde{\nu}_0(x)=-\int_{-1}^{1}m\left(\frac{1+x}{1+s}\right)\frac{\nu_1(s)ds}{1+s}+T_1^*[\nu_1]+F_3(-x) \qquad (13)$$

где $\tilde{\nu}_0(x)=\nu_0(-x)$

$n(y)=M(-1)/(1+by/a),\ m(y)=A(ay/b)^{-\alpha}/(1+ay/b)\,,\ A=\sin(\alpha\pi)/\pi$.

где $\overline{\overline{N}}_0[\tilde{\nu}_0],N_1[\nu_1],T_1^*[\nu_1]$- регулярные операторы.

Таким образом, уравнение (12) совместно с уравнением (13) составляют систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\tilde{\nu}_0(x)$ и $\nu_1(x)$ с сингулярной особенностью в ядре [9,10] .

Характерной особенностью уравнения (13) является то, что оно разрешено относительно $\tilde{\nu}_0(x)$, что позволяет из (12) исключить $\tilde{\nu}_0(x)$. Выражение для $\tilde{\nu}_0(x)$ из (12) подставляя в (13), имеем

$$\nu_1(x)=M(-1)\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{\alpha}\frac{\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{\alpha}-1}{\frac{1+x}{1+t}-1}\frac{\nu_1(t)dt}{1+t}+L_1[\nu_1]+F_3(x), \qquad (14)$$

где

$$L_1[v_1] = L[v_1] - \int_{-1}^{1} \frac{\Omega_2(x,t)v_1(t)dt}{1+t}$$

-регулярный оператор.

Введя обозначение $\psi(x) = (1+x)^{\alpha} v_1(x)$ уравнение (14) преобразуем к виду

$$\psi(x) = M(-1) \int_{-1}^{1} \frac{\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{1+x}{1+t} - 1} \frac{\psi(t)dt}{1+t} + L_2[\psi] + F_4(x), \qquad (15)$$

где $L_2[\psi] = L_1\left[(1+x)^{-\alpha} v_1\right]$, $F_4(x) = (1+x)^{\alpha} F_3(x)$.

В уравнении (15) сделав замену переменных $1+t = 2e^{-s}$, $1+x = 2e^{-z}$, с учетом равенств

$$e^{-\alpha s} - e^{-\alpha z} = 2sh(\alpha(z-s)/2)\ e^{-\alpha(z+s)2}$$

$$e^{-s} - e^{z} = 2sh((z-s)/2)\ e^{-\alpha(z+s)2}$$

преобразуем его к виду

$$\psi(2e^{-z}-1) = M(-1) \int_{0}^{} \frac{e^{(\alpha-1)s/2} sh\alpha(z-s)/2)\psi(2e^{-s}-1)}{e^{(\alpha-1)z/2} sh((z-s)/2)} ds + \qquad (16)$$

$$+L_2[\psi] + F_4(2e^{-z}-1).$$

Теперь в (16) введя обозначение, $\rho(z) = \psi(2e^{-z}-1)\ e^{(\alpha-1)s/2}$ перепишем его в виде

$$\rho(z) = M(-1) \int_{0}^{} \frac{sh(\alpha(z-s)/2)\rho(s)ds}{sh((z-s)/2)} + L_3[\rho] + F_5(z) \qquad (17)$$

где $L_3[\rho] = L_2\left[e^{(1-\alpha)z/2}\rho(z)\right]$, $F_5(z) = e^{(\alpha-1)z/2} F_4(2e^{-z}-1)$.

Уравнение (17) является интегральными уравнением Винера-Хопфа, это уравнение с помощью преобразования Фурье подобно известному характеристическому особому интегральному уравнению с ядром Коши приводиться к краевой задачи Римана и тем самым решается в квадратурах.

Если сингулярность ядра Коши $\frac{1}{t-x}$ заключает в разрыве при $t = x$, то сингулярность ядра $K(t-x)$ интегрального уравнения типа свертки вызвана неограниченностью промежутка интегрирования, и это ядро, в отличие от регулярного ядро, не убывает, если двигаться к бесконечности вдоль прямых $t = x + const$.

Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений типа свертки будут выполняться лишь в одном частном случае, когда индекс этих уравнений равен нулю.

Вычислим индекс уравнения (17).

Обозначим

$$k_1(x) = \frac{M(-1)sh(\alpha x/2)}{sh(x/2)}.$$

Индексом уравнения (17) будет индекс выражения $1-K(x)$ [11] с обратным знаком,

$$K(y) = \int_{-}^{+} e^{-iyx} k_1(x)dx = \int_{-}^{+} (\cos yx - i\sin yx)k_1(x)dx,$$

Здесь с учетом четности функции $k_1(x)$ и формулы [11, стр. 518]:

$$\int_0^{\infty} \cos ax \frac{sh\,\beta x}{sh\,\gamma x}dx = \frac{\pi}{2\gamma}\frac{\sin(\beta\pi/\gamma)}{ch(\alpha\pi/\gamma)+\cos(\beta\pi/\gamma)},$$

нетрудно убедиться, что

$$K(y) = M(-1)\int_{-}^{+} \cos yx \frac{sh(\alpha x/2)}{sh(x/2)}dx =$$

$$= M(-1)\frac{\pi}{2}\frac{sh\,\alpha\pi}{ch2y\pi+\cos\alpha\pi} = \frac{M(-1)\pi\sin\alpha\pi}{ch2y\pi+\cos 2\alpha\pi}$$

Здесь $K(y)<1$, то индекс выражения $1-K(y)$ равен 0. Следовательно, уравнение (17) однозначно редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода однозначная разрешимость которого следует из единственности решения задачи TH.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР. 1959. 164 с.
2. Мирсабуров М. Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе -Самарского на параллельных характеристиках. //Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 9. С. 1281-1284.
3. Мирсабуров М. Нелокальная краевая задача для уравнения Геллерстедта. // Математические заметки. 2000. Т. 67. Вып.5.С. 721-729.
4. Гималтдинова А. А. К теории уравнений смешанного типа. Уфа, 2006.
5. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука. 1970. -296 с.
6. Нахушев А.М. Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения. Вольтерра третьего рода. // Дифференциальные уравнения 1974. Т. 10 № 1. С. 100-111.
7. Линъ Цзянъ-бин. О некоторых задачах Франкля // Вестн. ЛГУ. Математика, механика и астрономия. 1961. Т. 3. № 13. С. 28-39.
8. Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во МГУ 1988. -149 с.
9. Гахов Ф.Д., Черский Ю.Н. Уравнения типа свертки. М.: Наука. 1978. 269 с.
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука 1971. -1108 с.