BG Pulse Journal USA
ISSN:1947-2536 http://www.bgpulseusa.com/index.php/bg

КВАДРАТИЧНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ, ПОСТРОЕНИЕ ПО БИНОМИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ.

Университет экономики и педагогики, Узбекистан, Карши

Доцент., **Мейлиев Хабибулла Жамолович**

Джамолов Хумоюн

студент Экономико-педагогического университета

Аннотация. Описание квадратичных стохастических операторов, соответствующие биномиальным распределениям, достаточно сложна и требует громоздких вычислений. В этой статей мы ограничимся изучением квадратичных стохастических операторов, соответствующие биномиальным распределениям.

Ключевые слова. Биномиальный, распределения, квадратичный, оператор, симплекс, пространство, распределений, элемент, множества, конечный граф, без петель, кратных, ребер, последовательность, признаков, фенотипов, генотипов, разновидности, родителей, вероятность, потомка, поколения.

Рассмотрим некоторою биологическую популяцию, т.е. замкнутое относительно размножения сообщество организмов. Предположим, что каждая особь, входящая в популяцию, принадлежит некоторой единственной из n разновидностей 1,2,3,…,n. Шкала разновидностей (признаков, фенотипов, генотипов) должна быть такой, чтобы разновидности родителей i и j однозначно определяли вероятность каждой разновидности k для непосредственного потомка первого поколения. Обозначим эту вероятность («Коэффициент наследованности») через $P_{ij,k}$.Очевидно что в этом случае выполнены условия:

$P_{ij,k}\geq 0, \sum_{k=1}^{n} P_{ij,k}=1$, для всех i,j,k

Предположим, что популяция настолько велика, что можно пренебречь флюктуациями частот. Тогда ее состояния можно описывать набором $x=(x_1,x_2,x_3\ldots,x_n)$ вероятностей разновидностей. т.е. x_i есть доля разновидности i в популяции.

При так называемой панмиксии или случайном скрещивании при фиксированном состоянии $x=(x_1,x_2,x_3\ldots,x_n)$ родительские пари i и j образуются с вероятностью x_ix_j и, следовательно,

$$x_k'=\sum_{i,j=1}^{n} P_{ij,k}\,x_ix_j \quad (1)$$

будет полной вероятностью к среди непосредственных потомков.

Множество $S^{n-1}=\{x=(x_1,x_{2,\ldots,}x_n): x_i\geq 0,\ i=1,2,\ldots,\mathrm{n}, \sum_{i=1}^{n} x_i=1\}$ называется n-1 мерным симплексом и, так как $\sum_{k=1}^{n} x_k'=1$ и $x_k'\geq 0$, то отображение (0.1), называемое квадратичным стохастическим оператором, переводит симплекс S^{n-1} в себя.

Пусть (λ,L)-конечный граф без петель и кратных ребер, где λ−множество вершин графа и L-множество ребер.

BG Pulse Journal USA
ISSN:1947-2536 http://www.bgpulseusa.com/index.php/bg

Пусть Φ-некоторое конечное множество, которое называется множеством аллелей. Отображения $\sigma:\Lambda\to\Phi$ называется клеткой. Обозначим через Ω прстранство всех клеток и $S(\Lambda,\Phi)$ множество всех вероятностных распределений, заданных на конечном множестве Ω.—Квадратичный оператор, переводящий симплекс $S(\Lambda,\Phi)$ в себя, -определяется следующим образом. Пусть $\{\Lambda_i\}$ совокупность связанных компонент графа (Λ,L), $i=1,\ldots,n.$ Для двух произвольных клеток $\sigma_1,\sigma_1,\sigma_2 \in\Omega$ положим

$$A(\sigma_1,\sigma_2)=\{x\in\Lambda:\sigma_1(x)=\sigma_2(x)\}$$

$$\dot{A}(\sigma_1,,\sigma_2)=\bigcup_{j:A(\sigma_1,\sigma_2)\cap\Lambda_i=\varnothing}\Lambda_i$$

если $\dot{A}(\sigma_1,,\sigma_2)\neq\varnothing$, то положим

$$\Omega\left(\Lambda,\dot{A}(\sigma_1,\sigma_2)\right)=\left\{\sigma\in\Omega:\sigma_{|\dot{A}(\sigma_1,,\sigma_2)}=\sigma_{1|\dot{A}(\sigma_1,,\sigma_2)}\text{ или }\sigma_{|\dot{A}(\sigma_1,,\sigma_2)}=\sigma_{2|\dot{A}(\sigma_1,,\sigma_2)}\right\}$$

В случае $\dot{A}(\sigma_1,,\sigma_2)=\varnothing$

$$\Omega\left(\Lambda,\dot{A}(\sigma_1,\sigma_2)\right)==\left\{\sigma\in\Omega:\sigma_{|\Lambda_i}=\sigma_{1|\Lambda_i}\text{ или }\sigma_{|\Lambda_i}=\sigma_{2|\Lambda_i}\text{ для всех }i=1,\ldots,n.\right\}$$

Пусть теперь $\mu\in S(\Lambda,\Phi)$ -некоторая вероятностная мера, определенная на Ω, такая, что $\mu(\sigma)>0$ для любой клетки $\sigma\in\Omega$.

Коэффициенты наследственности $P_{\sigma_1\,\sigma_2,\sigma}$ определим следующим образом:

$$P_{\sigma_1\,\sigma_2,\sigma}=\begin{cases}\dfrac{\mu(\sigma)}{\mu(\Omega(\Lambda,\dot{A}(\sigma_1,\sigma_2)))}, & \sigma\in\Omega\left(\Lambda,\dot{A}(\sigma_1,\sigma_2)\right)\\ 0, & \text{в остальных случаях}\end{cases}\qquad(2)$$

Квадратичный стохастический оператор V, действующий на симплексе $S(\Lambda,\Phi)$ и задаваемый коэффициентами наследственности (2), определяется следующим образом: для произвольной меры $\lambda\in S(\Lambda,\Phi)$ мера $V\lambda=\lambda'\in S(\Lambda,\Phi)$ определяется с равенством

$$\lambda'(\sigma)=\sum_{\sigma_1,\sigma_1,\sigma_2\in\Omega}P_{\sigma_1\,\sigma_2,\sigma}\lambda(\sigma_1)\lambda(\sigma_2)\qquad(3)$$

для любой клетки $\sigma\in\Omega$.

Нетрудно проверить, что коэффициенты наследственности удовлетворяют следующим условиям:

$$P_{\sigma_1\,\sigma_2,\sigma}\geq 0,\quad P_{\sigma_1\,\sigma_2,\sigma}=P_{\sigma_2\,\sigma_1,\sigma},\quad \sum_{\sigma\in\Omega}P_{\sigma_1\,\sigma_2,\sigma}=1\ .$$

По построению квадратичный стохастический оператор (3) зависит от структуры графа (Λ,L),множества значений аллелей (спина) Φ и выбора меры μ.

Пусть $|\Lambda|=n$ и $\Phi=\{A,a$. Для клетки $\sigma\in\Omega$ положим $n_A(\sigma)$ – число аллелей A в клетке σ(т.е. число «успехов») и зададим меру $\mu_\alpha(\sigma)$ на Ω как биномиальное распределение

$$\mu_\alpha(\sigma)=p^{n_A(\sigma)}q^{n-n_A(\sigma)}.$$

$p\geq 0, p\geq 0$, $p+q=1$ и $p/q=\alpha$. При $p=q$, т.е. $\alpha=1$, мера $\mu_1(\sigma)$ является равномерным распределением на Ω. Пусть теперь множество ребер графа (Λ, L)-пусто, т.е. Λ-снабжена структурой графа. В этом случае, отождествляя клетки σ_1 и σ_2, у которых $n_A(\sigma_1)=n_A(\sigma_2)$, образуем пространство клеток $\Omega=\{\widetilde{\sigma_1},\widetilde{\sigma_2},\widetilde{\sigma_3},\ldots,\widetilde{\sigma_n}$, где $\widetilde{\sigma_i}$-совокупность клеток с $n_A(.)=i\}$, на котором определено распределение

$$\mu_\alpha(\sigma)=C_n^i p^i q^{n-i}. \quad (4)$$

Пусть $\widetilde{V_\alpha}-$ квадратичный стохастический оператор построенные по биномиальным распределению (4) и действующий на .

$$S(\Omega)=\left\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n): x_i\geq 0,\ i=1,2,\ldots,n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i=1\right\}$$

квадратичный стохастический оператор называется менделевским, если правила наследования, определенные этим оператором, удовлетворяют закону Менделя.

Заметим, что под само совмещением понимается перемещение, т.е. преобразование, сохраняющее метрику. Группа само совмещений симплекс в R^4 несложно показать, что группа само совмещений тетраэдра G в R^4 состоит из группы всех перестановок вершин этого тетраэдра т.е. $G=\{\pi_l\}_{l=1}^{24}$.

Будем говорить, что квадратичный оператор V, определенный на симплексе S^3, соответствует некоторому само совмещению π_l, если V переводит вершины симплекса S^3 в вершины и ребра симплекса в ребра таким же образом, как само совмещение $\pi_l, l=\overline{1,24}$.

Обозначим через $\widetilde{\nu_l}$ совокупность всех сюръективных квадратичных операторов вида $V_l(\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\delta)$, $l=\overline{1,24}$.

Предложения Для любого $l=\overline{1,24}$ выпуклая линейная комбинация квадратичных операторов из $\widetilde{\nu_l}$ опять принадлежит $\widetilde{\nu_l}$.

Теорема 1. Любой сюръективный оператор является гомеоморфизмом симплекса S^3.

Доказательство. Из теоремы 1. следует, что произвольный сюръективный квадратичный оператор принадлежит одному из классов $\widetilde{\nu_l}$, $l=\overline{1,24}$. При $l=1$ это утверждение доказано в предложении.

Теорема 2. квадратичные операторы $\tilde{V}_\alpha$, определенны на симплксе , менделевские при $\alpha=1$ и $n=1$ или $n=2$, а при $n=3$ не являются менделевскими.

Менделевость оператора эквивалента тому, что, начиная со второго, шага, последовательность $x^{(k+1)}$ стабилизируется.

Теорема 3. Для квадратичного оператора $\tilde{V}_\alpha$ при $\alpha=1$ и $n=3$ траектория асимптотически стабильна, т.е. $x^{(k)}$ при $k\to$ сходится.

Теорема 4. Квадратичный оператор $\tilde{V}_\alpha$ при $\alpha=1$ и $n=1$ сюрьективен, а при $n=2$ и $n=3$ не является сюрьективным.

Литературы.

1.Бернштейн С.Н. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности. Уч. Зап. Н.И. квфедр. Украины, отд.матем.,1924,вып.Iс 83-115.,

2.Генетика и наследственность.//Сб.статей. М.,1987.300 с.

3.Ганиходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторы, функция Ляпунова и турнира//Мат.Сб.-1992.-83,№8.-С.119-140.

4.Розиков У.А.Жамилов У.У.О динамике строго невольтеровских квадратичных стохастических операторов на двумерном симплексе.//Мат.сб.-2009.-200,№9.-с.81-94.

5. Х.Ж. Мейлиев. НЕПОДВЕЖНЫЕ ТОЧКЕ КАВАДРАТИЧНЫЕ СТОХА СТИЧИСКИЕ ОПЕРАТОРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НА МАЛЫМ РАЗМЕРНОСТИ СЕМПЛЕКСА. «ЛУЧШИЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕИСЛЕДОВАНИЯ.». Vol47 №4(2025.06..04)