BG Pulse Journal USA
ISSN:1947-2536 http://www.bgpulseusa.com/index.php/bg

О БЕРНУЛЛИЕВСКОЕ И МЕНДЕЛЕВСКОЕ МЕРЫ НА СИМПЛЕКСЕ

Университет экономики и педагогики, Узбекистан, Карши
Доцент., **Мейлиев Хабибулла Жамолович**
Джамолов Хумоюн
а

Аннотация. Задача изучения свойств мер, порожденных квадратичными операторами, достаточно сложна и требует громоздких вычислений. В этой статей мы ограничимся изучением мер, соответствующих двум квадратичным операторам, которые описывают некоторые модели наследственной передачи.

Ключевые слова. Свойств, мер, квадратичный, оператор, симплекс, пространство, распределений, элемент, множества, последовательность, координатой функцией, подмножество, прямого произведения, алгебра композиция.

Пусть (E,m) произвольное пространство с мерой. Рассмотрим пространство $\Omega = \prod_{i=1} E_i$, где $E_i = E$ для всех натуральных i. Одной из важных проблем как в теории меры, так и в теории вероятностей является задача построения меры P на Ω, согласованной с мерой m на E. Для этого достаточно по теореме Колмогорова [2] задать согласованное семейство конечномерных распределений.

Пусть $E = \{1,2,...,N\}$ и $m(\{i\}) = P_i$ - вероятностная мера на E, т.е. $P_i \quad 0$ и $\sum_{l=1}^{N} p_l = 1$.

Пусть $\Omega = \prod_{l=1} E_l$, где $E_i = E$ для всех натуральных i. Произвольный элемент множества Ω является бесконечной последовательностью $\omega = (\omega_1, \omega_2, ...)$ элементов множества E. Пусть ξ_n -функция, ставящая в соответствие точке $\omega \quad \Omega$ значение ω_n ее n-й координаты. Функцию ξ_n называют n -й координатой функцией. Пусть $F - \sigma$ алгебра, порожденная совокупностью всех конечномерных цилиндров, т.е. множеств вида

$$\{\omega : (\xi_n(\omega), \xi_{n+1}(\omega), ..., \xi_{n+k-1}(\omega)) \quad A\} = \{\omega : (\omega_n, \omega_{n+1}, ...\omega_{n+k-1}) \quad A\}$$

где A -подмножество прямого произведения $E^k = \prod_{l=1}^{k} E_l$.

Цилиндрическое множество называется тонким, если его основание A является одноточечным подмножеством соответствующего конечного прямого произведения. Очевидно, σ -алгебра F порождается также совокупностью всех “тонких” цилиндров, т.е. множеств вида

$$\{\omega : \xi_n(\omega) = l_1, \ \xi_{n+1}(\omega) = l_2, ..., \xi_{n+k-1}(\omega) = l_k\},$$

где i_j -элемент множества E, $n \quad j \quad n+k$.

В силу этого замечания мера P на (Ω, F) однозначно определяется своими значениями

$$p_n(l_1, l_2, ..., l_k) = P\{\omega : \xi_n(\omega) = l_1, \xi_{n+1}(\omega) = l_2, ..., \xi_{n+k-1}(\omega) = l_k\} \quad (1)$$

на этих цилиндрах, где n-номер первой фиксированной координаты тонкого цилиндра и k -размерность цилиндра. По теореме Колмогорова [2], если для множества функций $p_n(l_1,l_2,...,l_k)$ справедливы следующие условия согласования

$$p_n(l_1,l_2,...,l_k) \quad 0$$
$$\sum_{l=1}^{N} p_n(l_1,l_2,...,l_k,l) = p_n(l_1,l_2,...,l_k) \qquad (2)$$
$$\sum_{l=1}^{N} p_n(l) = 1$$

при всех k,n и $l_j \quad E,1 \quad j \quad k$, то существует единственная вероятностная мера P на F, для которой имеет место (2); кроме того, если

$$p_n(l_1,l_2,...,l_k) = \sum_{l=1}^{N} p_n(l,l_1,l_2,...,l_k) \qquad (3)$$

при всех k,n и $l_j \quad E,1 \quad j \quad k$, то мера P сохраняется при преобразовании сдвига.

Таким образом, основную сложность при построении меры P на F составляет указание способа задания семейства функций $\{p_n(l_1,l_2,...,l_k), n \text{ и } k \text{ натуральные}\}$, удовлетворяющих условию (2). Наиболее полно изучены следующие два способа построения семейства функции $p_n(l_1,l_2,...l_k)$.

1.Схема Бернулли. Пусть $m(\{l\}) = p_l$ - распределения на $E = \{1,2,...,N\}$.

$$p_n(l_1,l_2,...,l_k) = p_{l_1} p_{l_2} ... p_{l_k} \qquad (4)$$

мера P называется Бернуллиевской и в этом случае последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}$ образует цепь Бернулли.

2. **Схема Маркова**. Пусть $\Pi = (p_{lj})_{l,j=1}^{N}$ -стохастическая по строкам матрица. Если положить

$$p_n(l_1,l_2,...,l_k) = p_{l_1} p_{l_1 l_2} ... p_{l_{k-1} l_k} \qquad (5)$$

т.е. $p_n(l_1,l_2,...,l_k)$ не зависит от n, то имеют место соотношения (2). Соответствующая (5) мера P называется Марковской. Если вектор вероятностей $p = (p_1,p_2,...,p_N)$ удовлетворяет условию $P\Pi = P$, то будет иметь место соотношение (3). В этом случае последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}$ образует стационарную цепь Маркова.

Для квадратичного оператора $V : S^{N-1} \to S^{N-1}$ и произвольной точки симплекса $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \quad S^{N-1}$ положим $x^{(k+1)} = Vx^{(k)}$. На одномерных цилиндрических множествах функции $p_n(l)$ определим следующим образом:

$$p_n(l) = x_l^{(n-1)} \qquad (6)$$

для всех натуральных n и $l \quad E$.

BG Pulse Journal USA
ISSN:1947-2536 http://www.bgpulseusa.com/index.php/bg

Для произвольных тонких цилиндров, функции $p_n(l_1,l_2,...,l_k)$ при $k>1$ определим образом

$$p_n(l_0,l_1,...,l_k)=x_{l_0}^{(n)}\sum_{m_1,...,m_k=1}^{N}p_{l_0m_1,l_1}\ p_{l_1m_2,l_2}\ p_{l_2m_3,l_3}...p_{l_{k-1}m_k,l_k}\ x_{m_1}^{(n)}\ x_{m_2}^{(n+1)}....x_{m_k}^{(n+k-1)} \quad (7)$$

Первое условия (2), очевидно, выполняется.

$$\sum_{l=1}^{N}p_n(l_0,l_1,...,l_k,l)=x_{l_0}^{(n)}\sum_{m_1,...,m_k,m_{k+1}=1}^{N}p_{l_0m_1,l_1}\ p_{l_1m_2,l_2}\ p_{l_2m_3,l_3}...p_{l_{k-1}m_k,l_k}\ p_{l_km_{k+1},l}$$

$$x_{m_1}^{(n)}\ x_{m_2}^{(n+1)}...x_{m_{k+1}}^{(n+k)}=x_{l_0}^{(n)}\sum_{m_1,...,m_k=1}^{N}p_{l_0m_1,l_1}\ p_{l_1m_2,l_2}\ ...p_{l_{k-1}m_k,l_k}$$

$$x_{m_1}^{(n)}\ x_{m_2}^{(n+1)}...x_{m_k}^{(n+k-1)}=p_n(l_0,l_1,...,l_k)$$

Таким образом, существует единственная вероятностная мера P, определенная функциями (6)-(7), которую естественно назвать мерой, порожденной квадратичным операторам V и распределением $x^{(0)}\ \ S^{N-1}$.

Рассмотрим теперь модель наследования для диплоидных организмов. В этом случае генотипы определяются парой аллелей A и α, т.е. в этом случае существуют три генотипа AA, Aa и aa. Квадратичный оператор, определяются следующими переходными вероятностями: $P_{AAAA,AA}, P_{AAAa,AA}, P_{AaAa,AA}, P_{AAaa,AA}$ и.т.д.-

для упрощения вместо $\{AA, Aa, aa\}$ будем рассматривать множество $E=\{1,2,3\}$.

$$\begin{array}{lll} P_{11,1}=1 & P_{12,1}=P_{21,1}=1/2 & P_{13,1}=P_{31,1}=0 \\ P_{11,2}=0 & P_{12,2}=P_{21,2}=1/2 & P_{13,2}=P_{31,2}=1 \\ P_{11,3}=0 & P_{12,3}=P_{21,3}=1/2 & P_{13,3}=P_{31,3}=0 \\ P_{22,1}=1/4 & P_{23,1}=P_{32,1}=0 & P_{33,1}=0 \\ P_{22,2}=1/2 & P_{23,2}=P_{32,2}=1/2 & P_{33,2}=0 \\ P_{22,3}=1/4 & P_{23,3}=P_{32,3}=1/2 & P_{33,3}=1 \end{array} \quad (8)$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)}=\left(x_1^1+x_2^1/2\right)^2 \\ x_2^{(2)}=2\left(x_1^1+x_2^1/2\right)\left(x_3^1+x_2^1/2\right) \\ x_3^{(2)}=\left(x_3^1+x_2^1/2\right)^2 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)}=\left(x_1^0+x_2^0/2\right)^2 \\ x_2^{(2)}=2\left(x_1^0+x_2^0/2\right)\left(x_3^0+x_2^0/2\right) \\ x_3^{(2)}=\left(x_3^0+x_2^0/2\right)^2 \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, для любого начального распределения $x^{(0)} = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)$ $x^{(k)} = x^{(1)}$ для любого $k > 1$, т.е. со второго шага, наступает стабилизация частот генотипов AA, Aa и aa что соответствует закону Харди- Вайнберга.

Теорема 1. Для менделевских мер $P_{x^{(0)}}$ при любом $x^{(0)}$ S^3 и любых натуральных k и l имеет место следующее равенство:

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = l_0, \xi_{k+l} = l_1\right) = P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = l_0\right) P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l} = l_1\right) + \frac{P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l} = l_1\right)}{2^{l-1}} a \qquad (10)$$

где a $M = \{1/2x_2^{(1)}, (x_3 + 1/2x_2)(x_3 - x_1), -1/2(x_3 + 1/2x_2)(x_3 - x_1),$
$-x_3^{(1)}, 1/2(x_3 - x_1)^2, 1/2(x_1 + 1/2x_2)(x_3 - x_1), -(x_1 + 1/2x_2)^2\}.$

Список литературы:

1.Генетика и наследственность. // Сб .статей. Мю,1987. 300 с.
2. Колмогоров А.Н.,Основные понятые теории вероятностей.М,1936,138с
3. Мейлиев Х.Ж. Об одном свойстве мер, соответствующим менделевским квадратичным операторам. Конференция International conference on some topics of mathematics. October 13-17,1996. Samarkand,P.151-152.
4. Х.Ж. Мейлиев. НЕПОДВЕЖНЫЕ ТОЧКЕ КАВАДРАТИЧНЫЕ СТОХА СТИЧИСКИЕ ОПЕРАТОРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НА МАЛЫМ РАЗМЕРНОСТИ СЕМПЛЕКСА. «ЛУЧШИЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕИСЛЕДОВАНИЯ.». Vol47 №4(2025.06..04)